

Die Fibonacci-Folge im „Schwarzen Loch“ - zu ihrer geometrischen Verschränkung mit dem „Goldenen Schnitt“

Der nachfolgende Aufsatz richtet sich *nicht* in erster Linie an gestandene Mathematiker, obwohl Neues darin zu finden sein mag. Ich möchte ihn eher für Schüler oder Studenten abfassen und zwar dies nicht in höchster Abstraktheit, sondern eher so, dass man ihn mit Abitur-Kenntnissen verstehen kann. Überdies möchte ich dem Leser -zweifellos ein wenig „feuilletonistisch“- meine eigene Faszination für zunächst unzusammenhängende und scheinbar weit auseinander liegende mathematische Gegenstände mitteilen, die sie sich dann doch als engstens miteinander verschränkt zeigen, wenn man *nur ein wenig* die Oberfläche verlässt. Das Sich-Wundern ist der Beginn der mathematischen Neugier, mehr auch der Beginn eines, jedenfalls *meines* philosophischen Interesses an der Mathematik.

I. Zwei äquivalente Definitionen des „Goldenen Schnitts“

Die „klassische“ Definition des Goldenen Schnitts ergibt sich aus der Problemstellung: Kann man von einer Gesamtstrecke AB eine Strecke x so abteilen, dass sich die Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke so verhält wie die größere zur kleineren?



Eine solche Einteilung wird von Menschen als besonders harmonisch empfunden und findet sich vielfach in der Architektur griechischer Tempel und in der belebten Natur wieder. Ich verweise hierzu nur auf die schönen Ausführungen von Stelzner: „Der Goldene Schnitt – das Mysterium der Schönheit“¹. Offenbar ist die Wahrnehmung der Harmonie des Goldenen Schnittes dem Menschen eingeboren. Die Vermessung hunderter *altsteinzeitlicher* Faustkeile ergab nach Stelzner immer ein Höhen-Breitenverhältnis hoch signifikant nah am Goldenen Schnitt.

Noch merkwürdiger ist das 'Wissen' der Sonnenblumen um die Fibonacci-Zahlen und den ebenfalls aus dem Goldenen Schnitt berechneten Goldenen Winkel von 137,5 Grad, das den Blüten der Sonnenblume und anderen Korbblütlern offenbar unentrinnbar genetisch einprogrammiert ist².

Mathematisch gesehen führt die Definition auf die Gleichung

$$\frac{x+a}{x} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x^2 - ax - a = 0$$

Diese Gleichung hat die zwei Lösungen

$$x_1 = \frac{a}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{a}{2} \cdot (1 - \sqrt{5}), \quad \text{wobei nur die positive Lösung für den Goldenen}$$

Schnitt in Frage kommt. Der Faktor a ist offenbar nur ein Streckfaktor, der immer nur ähnliche Figuren erzeugt, sodass man sich auf den Fall $a = 1$ beschränken kann. Damit bekommen die Gleichungen die einfache Form

1 Stelzner: www.golden-section.eu/Kapitel5.html; hierin ist besonders interessant, wie in der vordergründigen Asymmetrie dennoch wieder Symmetrie gesehen werden kann.

2 www.was-darwin-nicht-wusste.de/.../ mathematische Überraschungen.html

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0,$$

deren positive Lösung $x_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \approx 1,618033988 \dots$

den gesuchten Goldenen Schnitt φ der Strecke AB mit der Länge $x_1 + 1$ bzw. $\varphi + 1$ darstellt.

Die irrationale Zahl φ ist schon sehr seltsam und einzigartig. Wegen $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$, also

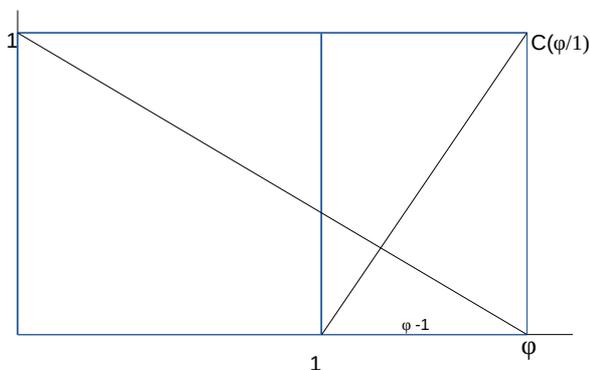
$\varphi^2 = \varphi + 1$ ist $\varphi^2 \approx 2,618033988$ und hat die gleichen Nachkommastellen wie φ selbst.

Überdies ist $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{1}{x}$, sodass gilt: $\frac{\varphi-1}{1} = \frac{1}{\varphi}$

Dies ist in doppelter Weise interessant. Zunächst ergibt sich der seltsame Zusammenhang $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, sodass mit $\varphi = 1,618033988 \dots$ die Zahl $\frac{1}{\varphi} = 0,618033988 \dots$ ebenfalls exakt die gleichen Nachkommastellen hat.

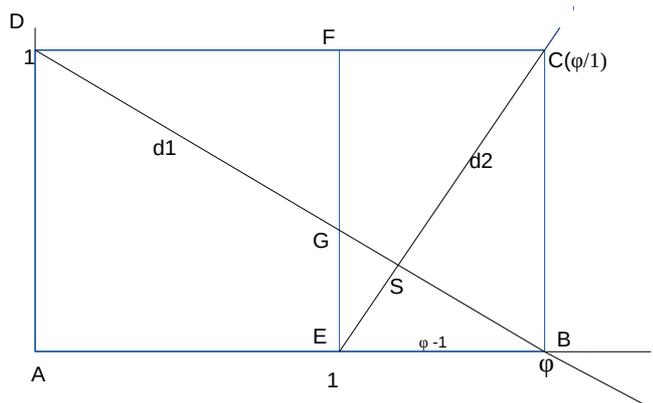
In **unserem** auf die Geometrie gerichteten Zusammenhang ist **ein Zweites noch wichtiger**:

Es liegt nahe, den Term $\frac{1}{\varphi}$ als Steigung in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 1 und φ zu interpretieren und den Term $\frac{\varphi-1}{1}$ als Steigung in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 1 und der um 1 verkleinerten Seite $\varphi - 1$ aufzufassen bzw. als Steigungen der (schwarz gezeichneten) Diagonalen, wenn die Figur -wie skizziert- zu einem Rechteck ergänzt wird, das das zweite in sich fasst:



Dieses ist die *zweite Möglichkeit, den Goldenen Schnitt zu definieren*, auf die sich die nachfolgenden Überlegungen thematisch beziehen.

II. Für diese Überlegungen werden die **Diagonalengeraden** d1 und d2 wichtig.



(1) $d_1 \perp d_2$, denn d_1 hat die Steigung $-\frac{1}{\varphi}$, während d_2 die Steigung $\frac{1}{\varphi-1} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$

hat, sodass das Produkt der Steigungen = -1 ist und somit die Orthogonalitätsbedingung erfüllt.

(2) Der **Schnittpunkt S der beiden Diagonalen** ergibt sich als

$$S\left(\frac{2\varphi+1}{\varphi+2} / \frac{1}{\varphi+2}\right) \text{ oder } S\left(\frac{\varphi^3}{\varphi+2} / \frac{1}{\varphi+2}\right) \text{ (s. im Folgenden),}$$

wie man leicht aus den beiden Geradengleichungen unter Anwendung der interessanten Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ und der Verallgemeinerung $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ errechnet³.

Die Folge der Potenzen von φ zeigt schon -in den ersten und zweiten Summanden gleich doppelt und untereinander verschoben- die Folge der Fibonacci-Zahlen auf:

$$\begin{array}{l} \varphi = 0 + 1 \varphi \\ \varphi^2 = 1 + 1 \varphi \\ \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2 \varphi \\ \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = (1 + 2 \varphi) + (1 + \varphi) = 2 + 3 \varphi \\ \varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = (2 + 3 \varphi) + (1 + 2 \varphi) = 3 + 5 \varphi \\ \varphi^6 = 5 + 8 \varphi \\ \varphi^7 = 8 + 13 \varphi \dots\dots\dots \end{array}$$

Die o.a. Gleichung zu φ^n entspricht in sich schon dem Bildungsgesetz $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ der Fibonacci-Folge, ohne indessen die Fibonacci-Folge

$$(f_n) = \{0,1,1,2,3,5,8,13,\dots\} \text{ direkt zu definieren.}$$

Letzteres ist erst durch die erstaunliche Binet-Moivresche Formel möglich⁴:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n)$$

Diese Gleichung drückt die Fibonacci-Zahlen mit Hilfe der beiden Lösungen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ von der Ausgangsgleichung $x^2 - x - 1 = 0$ aus, wobei die negative Lösung ψ

keine *unmittelbare* geometrische Bedeutung hat. Nun ist aber -wie sich leicht errechnen lässt - $\psi = (-\varphi)^{-1}$, und folglich $\psi^n = (-\varphi)^{-n}$, sodass der Term $f(n)$ die folgende Form gewinnt:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}).$$

Zwar ist dieser Term keinesfalls einfacher als der vorige, er zeigt aber, dass *die Fibonacci-Zahlen allein durch den Goldenen Schnitt φ definiert* werden können, sodass ihr innerer Zusammenhang hier viel elementarer und grundsätzlicher ausgedrückt ist. Erstaunlich an dieser Gleichung ist, dass durch sie -trotz ihrer stark irrationalen Anteile- immer exakt natürliche Zahlen dargestellt werden.

3 Sehr einfacher Beweis s. Stelzner: aaO

4 Peters: www.mathe-seiten.de/fibonacci.pdf; hier findet sich eine Idee zum Beweis, der wohl nicht ganz schlüssig ist. Eine schlüssige Durchführung der Idee durch Prof. Dr. Claudio Rea/Universität Rom befindet sich in meiner Hand.

Stelzner⁵ weist überdies darauf hin, dass die Folge der Quotienten aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen, also $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ in sich schon die Zahl φ abwechselnd von unten und von oben annähern, sodass durch diese beiden Folgen die Zahl φ als *die eine innere* Zahl einer entsprechenden (ins Unendliche fortgesetzt gedachten) Intervallschachtelung gelten muss:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \varphi$$

Ebenso schön zeigt sich φ in der Kettenbruchentwicklung für die Quotienten $\frac{f(n)}{f(n-1)}$:

Ausgehend von der definierenden Gleichung $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ ist für alle $n > 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{f(n-1)} &= 1 + \frac{f(n-2)}{f(n-1)} = 1 + \frac{1}{\frac{f(n-1)}{f(n-2)}} = 1 + \frac{1}{\frac{f(n-2)+f(n-3)}{f(n-2)}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{f(n-3)}{f(n-2)}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f(n-2)}{f(n-3)}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f(n-3)+f(n-4)}{f(n-3)}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{f(n-4)}{f(n-3)}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f(n-3)}{f(n-4)}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f(n-4)+f(n-5)}{f(n-4)}}}} = \\ &= \dots \\ &= [1; 1; 1; 1; \dots; \frac{f(2)}{f(1)}] \end{aligned}$$

Der unterste Quotient beginnt wieder mit 1 und so fort, sodass die Kettenbruchentwicklung immer mit der 1 beginnt, bis zu dem letzten Glied $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{f(1)+f(0)}{f(1)} = 1 + 0 = 1$, sodass die gesamte Kettenbruchentwicklung $[1; 1; 1; 1; 1; \dots; 1]$ ergibt, mit $n-1$ Termen 1.

Weiter gilt wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = \varphi$, dass auch $\varphi = [1; 1; 1; 1; 1; \dots]$ ist,

sodass sich Stelzner zufolge *die Zahl φ als die „irrationalste aller irrationalen Zahlen“ geradezu durch diese größtmögliche Einfachheit ausweist*, und nicht etwa durch eine besonders undurchsichtige und unvorhersehbare Form wie die Kettenbruchentwicklung von allen anderen irrationalen Zahlen, etwa der von $\sqrt{2}$, deren Irrationalität bereits von den alten Griechen⁶ bewiesen wurde. Auch hierin sieht Stelzner ihre besondere Schönheit und er vermag nachzuvollziehen, wieso sich gerade φ so vielfältig in der Natur offenbart und vielleicht sogar eine Schlüsselrolle im Verständnis der Natur oder gar der Schöpfung spielt.

⁵ Stelzner: a.a.O

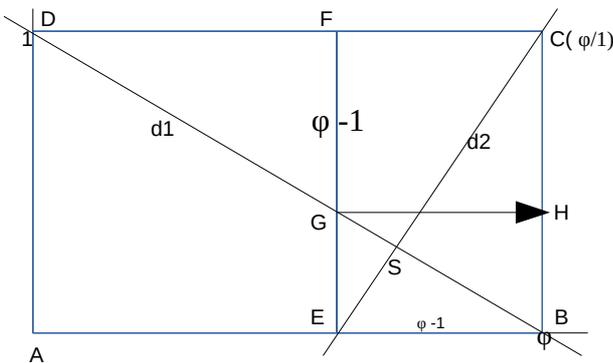
⁶ Platon beschreibt in seinem Dialog „Menon“, wie Sokrates einen Sklaven zu dieser Erkenntnis führt. Man mag es für eine Ironie der Geschichte halten, dass Platon -immer auf der Suche nach Schönheit in der Einheit- in Kenntnis der Definition des Goldenen Schnitts von der *irrationalen Schönheit* von φ nichts ahnte. Als Schönheit galt nur, was in einem 'logos', lat. 'ratio', was in rechten Verhältnissen sich ausdrückt, also auch in *rationalen* Zahlen. So war den alten Griechen die Entdeckung der Irrationalität eher befremdlich.

Diese aufgezeigten *mathematischen Zusammenhänge*, erst recht die *naturphilosophischen Fragen*, die sich hier stellen, sind *nicht zentral* für die aktuelle *geometrisch orientierte* Untersuchung.

(3) Die Bedeutung des Punktes G und des Punktes S als Zentralpunkt

$$\frac{|GF|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|DC|} \Leftrightarrow \frac{|GF|}{1} = \frac{1}{\varphi}, \text{ was zur Folge hat}$$

$|GF| = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Das bedeutet, dass die *Parallele zu AB durch den Punkt G automatisch vom zweiten Rechteck wieder ein Quadrat GHCF abtrennt*, sodass die Seitenlängen des neu entstehenden dritten Rechtecks EBHG wieder das Verhältnis $\frac{1}{\varphi}$ haben.

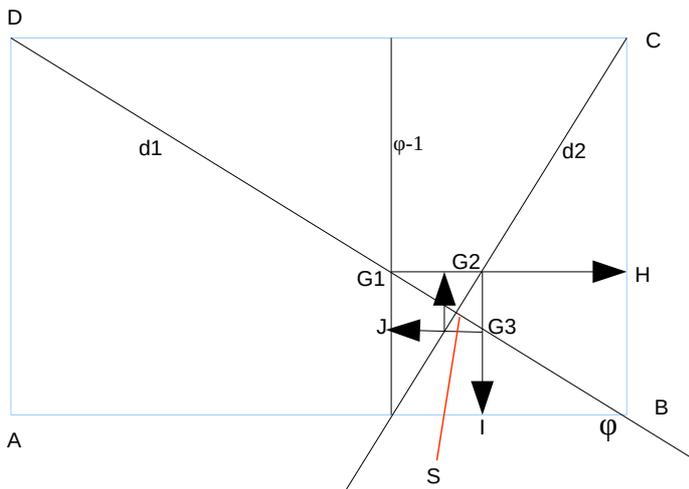


Weiter, bezogen auf die nächste Skizze:

War im Rechteck ABCD d1 die Hauptdiagonalengerade, so hat im Rechteck EBCF die Gerade d2 und in EBHG wiederum die Gerade d1 diese Funktion übernommen. Die genannte Parallele GH erzeugt mit der Hauptdiagonalen von EBCF einen weiteren Schnittpunkt, der für das damit gebildete Rechteck die gleiche Funktion hat wie G. Er mag G2 heißen, der Punkt G nunmehr G1. Die Parallele zu EG1 durch G2 erzeugt ein weiteres zu den anderen Rechtecken ähnliches Rechteck wieder mit dem Streckfaktor $\frac{1}{\varphi}$ und einem weiteren G-Punkt G3.

Das Konstruktionsverfahren neuer Rechtecke und G-Punkte kann man beliebig iterieren. Jedesmal dreht sich das Kreuz der Diagonalen rechts herum um 90^0 und die neue Hauptdiagonale erzeugt in dem neuen Rechteck als Schnittpunkt mit der inneren längeren Seite einen weiteren Punkt Gi. Die übrigen neuen Punkte auf den Rechteckseiten werden alphabetisch benannt. Alle Streckenlängen, auch die Diagonalenabschnitte werden von Rechteck zu Rechteck mit dem Faktor $\frac{1}{\varphi}$ verkürzt, sodass alle Rechtecke ähnlich sind.

Dabei bleibt der Punkt S notwendig im Inneren eines jeden neu entstehenden Rechtecks, sodass sich die unendliche Folge der Rechtecke um den Punkt **S als ihren einzigen inneren Punkt**, der **allen Rechtecken zugehört**, sozusagen in einer 'Rechteckschachtelung' zusammenzieht.



(Die automatische Abtrennung von Quadraten durch jeden Pfeil ist im Inneren wegen der Addition der grundsätzlichen und teils programmbedingten Zeichnungungenauigkeiten nicht mehr gut zu erkennen.)

III. Die Entwicklung der Seitenlängen in der Folge der Rechtecke

Es war schon oben herausgestellt, dass der Punkt G1 die Strecke EF so unterteilt, dass

$$|G1, F| = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \text{ ist und damit}$$

$$|E, G1| = 1 - (\varphi - 1) = 2 - \varphi = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 \text{ gilt.}$$

Alle Seitenlängen in der Folge der Rechtecke lassen sich auf auf dreierlei Weise darstellen.

Zunächst einmal sind sie alle Potenzen von $\frac{1}{\varphi}$, weil sich die Seitenlängen von Rechteck zu

Rechteck mit diesem Faktor verkürzen. Das gilt sogar von $|A, B| = \varphi = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{-1}$.

$$|A, B| = \varphi = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{-1} = 1 + (\varphi - 1) = 1 + \frac{1}{\varphi} = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^0 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^1$$

$$|B, C| = 1 = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^0 = (\varphi - 1) + (1 - (\varphi - 1)) = (\varphi - 1) + (2 - \varphi) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2$$

$$\begin{aligned} |G1, H| = |G1, F| &= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^1 = |H, G2| + |G1, G2| = 2 - \varphi + (\varphi - 1 - (2 - \varphi)) = \\ &= 2 - \varphi + (-3 + 2\varphi) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G2, I| &= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 = |G3, I| + |G2, G3| = |G1, G2| + |G2, G3| = \\ &= (-3 - 2\varphi) + ((2 - \varphi) - (-3 + 2\varphi)) = (-3 + 2\varphi) + (5 - 3\varphi) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^3 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^4 \end{aligned}$$

Hierin sieht man schon ein Bildungsprinzip ab, sodass sich für die längere Seite G3, J im 4. Rechteck ergibt:

$$|G3, J| = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^3 = (5-3\varphi) + ((-3+2\varphi) - (5-3\varphi)) = (5-3\varphi) + (-8+5\varphi) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^4 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^5$$

.....

Bei der Betrachtung der Struktur dieser Ergebnisse fällt **zweierlei** auf:

(1) Ganz rechts läuft es hinaus auf die Aussageform $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+2}$ bzw. etwas allgemeiner $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{n+2}$ (*), welche im Positivbereich ohnehin nur für $x > 1$ erfüllbar ist. Indessen gelingt der Induktionsschluss von n auf $n+1$ für (*) sogar für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ durch beidseitige Multiplikation mit $\frac{1}{x}$, sodass sich ein „fliegender Teppich“ von Aussagen bildet, der für sich genommen *keinerlei* Gültigkeitsanspruch hat und einer Verankerung 'hienieden' bedarf.

Die *Induktionsverankerung* für $n = 0$ führt durch beidseitige Multiplikation mit x^2 auf

$$\left(\frac{1}{x}\right)^0 = \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 .$$

Sie führt also auf die den Goldenen Schnitt definierende Gleichung, die nur die beiden Lösungen φ und ψ hat, sodass die o.a. Aussageform (*) für fast alle reellen Zahlen unerfüllbar ist und *nur für diese beiden Zahlen* erfüllbar und allgemeingültig in der Menge der natürlichen Zahlen inclusive 0 ist.

(2) In der obigen ersten Darstellung der längeren Seiten der Rechtecke treten als Summanden stets Terme auf, die die **Fibonacci**-Zahlen in einer aufsteigenden Folge bilden, die dann als Seitenlängen immer den aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\varphi}$ entsprechen, sodass

$$-1+1\varphi = \varphi^{-1} ; 2-1\varphi = \varphi^{-2} ; -3+2\varphi = \varphi^{-3} ; 5-3\varphi = \varphi^{-4} ; -8+5\varphi = \varphi^{-5} \dots\dots\dots$$

Die Verschränkung von φ mit den Fibonacci-Zahlen in diesem Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn man Peters⁷ folgend für die ähnlichen Rechtecke je das konstante Verhältnis φ von der kleineren zur größeren Seite notiert:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{-1+1\varphi}{1} = \frac{2-1\varphi}{-1+1\varphi} = \frac{-3+2\varphi}{2-1\varphi} = \frac{5-3\varphi}{-3+2\varphi} = \frac{-8+5\varphi}{5-3\varphi} = \frac{13-8\varphi}{-8+5\varphi} =$$

$$\frac{-21+13\varphi}{13-8\varphi} = \dots\dots\dots, \text{ was in der Verschränktheit aufeinanderfolgender Terme noch einmal}$$

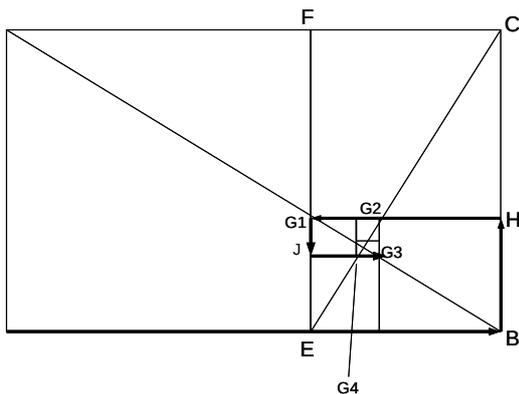
widerspiegelt, dass das je nächste Rechteck mit dem Faktor $\frac{1}{\varphi}$ geschrumpft ist.

IV. Der Weg ins Zentrum S und seine Gesamtlänge

Der Weg ins Zentrum ist eine Schneckenkurve, - wie in der nachfolgenden Skizze angedeutet. Sie beginnt im ersten Rechteck bei A, geht nach B, dann links herum auf die größere Seite des zweiten Rechtecks bis zum Punkt H, dann über zwei Schnittpunkte mit den Diagonalen (hier G2 und G1) in das nächste Rechteck zum Punkt J, von J aus wieder über zwei Diagonalschnittpunkte über G4 und G3 und so fort. Damit durchmessen die je horizontal liegenden Strecken die betreffenden

7 Peters: aaO

Rechtecke ganz, die vertikalen immer nur ein Stück weit:



Im Folgenden werden die Einzelstrecken der Wegschnecke bis zum je übernächsten Pfeil, also über Eck als Potenzen von $\frac{1}{\varphi}$ berechnet und dann aufsummiert.

$$|AE| + |EB| + |BH| = 1 + \left[\left(\frac{1}{\varphi}\right)^1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 \right] = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^0 + \left[\left(\frac{1}{\varphi}\right)^1 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^0 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^0 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi}\right)^0 (= 2),$$

wobei -wie auch im Weiteren- die auf Seite 5 als allgemeingültig bewiesene Gleichung

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+2} \text{ angewendet wurde.}$$

$$|H, G2| + |G2, G1| + |G1, J| = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^3 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2$$

$$|J, G4| + |G4, G3| + |G3, Pfeil| =$$

$$= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^4 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^5 + \left(\frac{1}{\varphi}\right)^6 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi}\right)^4$$

Der nächste Teilweg beginnt mit $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^6$, der Quadratseite, die vom betreffenden Rechteck

abgetrennt wird. Die nächsten Summanden schrumpfen wieder mit dem Faktor $\frac{1}{\varphi}$, sodass die Summe analog

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi}\right)^6 \text{ ergibt.....}$$

Die weiteren Übereck-Wegstrecken ergeben sich entsprechend, was sich auch -wenigstens für die ersten- in der nachstehenden Zeichnung verifizieren lässt.

Damit ergibt sich für die Wegstrecke W_n der ersten n Teilwege der Schneckenlinie

$$W_n = 2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2i} = 2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^i = 2 + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{\varphi^2}}$$

und für den Grenzwert der obigen geometrischen Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^i = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n}{1 - \varphi^{-2}} = \frac{1}{\varphi^2 - 1} \quad (\text{die Folge } \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n \text{ ist Nullfolge, Grenzwert } 0)$$

$$= \frac{1}{(\varphi+1)-1} = \frac{1}{\varphi}$$

sodass der gesamte Schneckenweg die Länge $W = 2 + \frac{2 \cdot 1}{\varphi} = 2 + 2 \cdot (\varphi - 1) = 2 \varphi$ hat,

also lediglich die Länge der beiden langen Seiten des Ausgangsrechtecks zusammen. Das bedeutet, dass nach Durchlaufen der Strecke AB der *gesamte Rest der Schnecke* nur noch einmal die Länge φ ergibt.

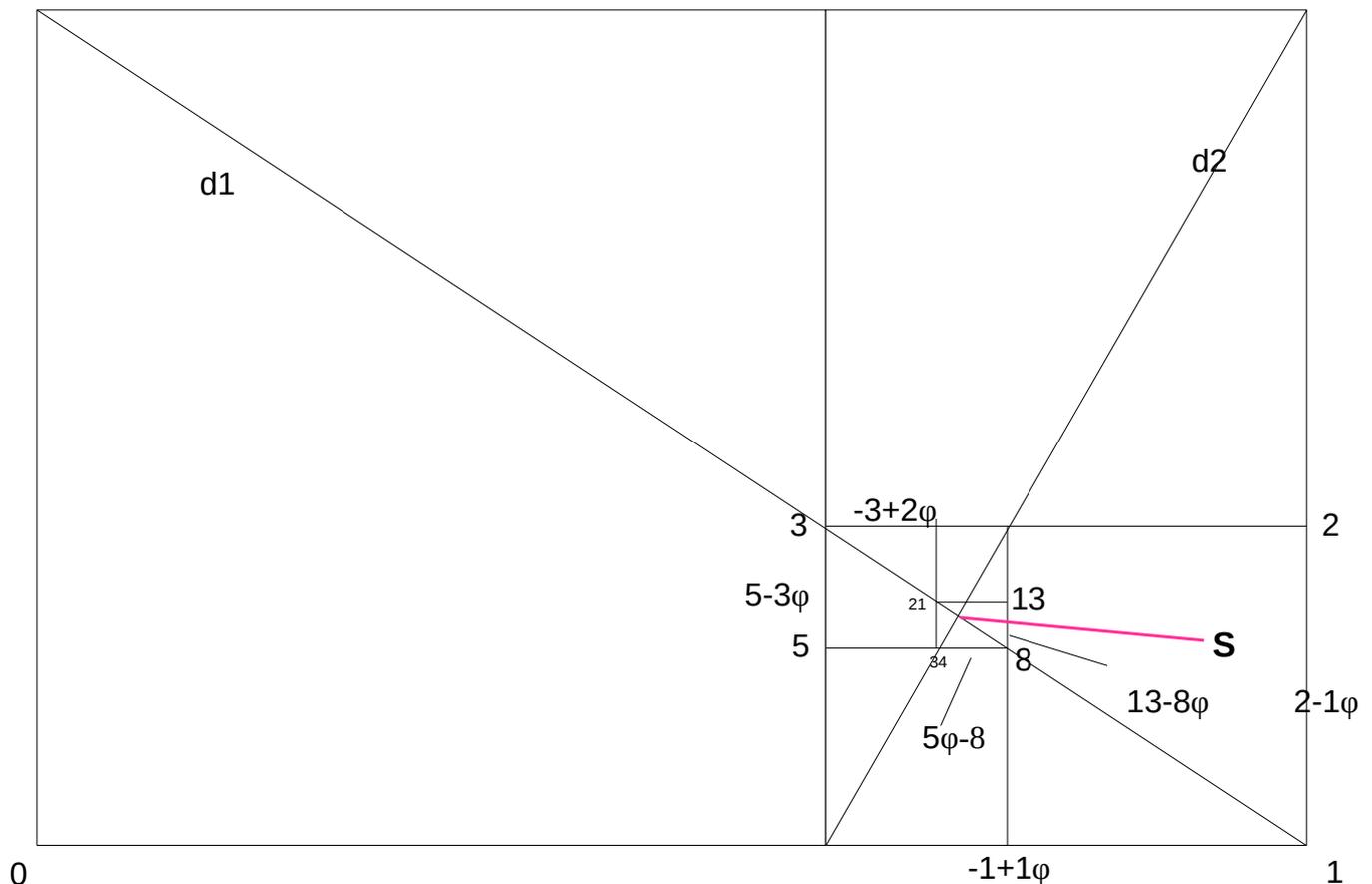
V. Fibonacci-Zahlen und der Innere Punkt S

Die im Vorigen betrachteten Wegstrecken entsprechen sämtliche den Potenzen von $\frac{1}{\varphi}$ und diese wiederum den Termen $-1+1\varphi$; $2-1\varphi$; $-3+2\varphi$; $5-3\varphi$; $-8+5\varphi$; $13-8\varphi$;....., die die Fibonacci-Zahlen enthalten, sodass jeder Term einer der auftretenden Rechteckseiten als dessen Länge zugeordnet werden kann.

Man kann nunmehr sogar **allen Eckpunkten der Wegschnecke bei A beginnend aufsteigend alle Fibonacci-Zahlen** zuordnen, wie es in der nächsten Skizze bis zur Zahl 34 angedeutet ist. Dabei wird im ersten Rechteck dem Schnittpunkt der Strecken $-1+1\varphi$ und $2-1\varphi$ die gemeinsame Zahl 1, sowie dem nächsten Punkt auf der senkrechten Rechteckseite die Zahl 2,

im dritten Rechteck dem Schnittpunkt der Strecken $-3+2\varphi$ und $5-3\varphi$ die gemeinsame Zahl 3, sowie dem nächsten Punkt auf der senkrechten Rechteckseite die Zahl 5

zugeordnet. Jede zweite Fibonacci-Zahl liegt dabei auf d1, während auf d2 überhaupt keine liegen. Diese Zuordnung ist dabei bijektiv (jedem Eckpunkt ist genau eine Fibonacci-Zahl und jeder Fibonacci-Zahl ist genau ein Eckpunkt zugeordnet).



Nunmehr drängen sich immer größere Fibonacci-Zahlen auf den Ecken von immer kleineren Rechtecken, die alle den Zentralpunkt **S** haben. Beim Übergang zum nächsten Rechteck dreht sich

jedesmal das Kreuz der Diagonalen rechts herum um genau 90^0 weiter.

Wenn man sich überdies vorstellt, dass die Rechtecke mit konstanter Bahngeschwindigkeit durchlaufen werden, dann dreht sich das Drehkreuz um S immer schneller, und immer gigantischere Fibonacci-Zahlen (bereits die Zahl $f(300)$, noch ganz am Anfang der Folge, hat schon ungefähr 40 Stellen) rasen mit immer größerer Winkelgeschwindigkeit strudelartig in die Unsichtbarkeit dem Punkt S entgegen.

Nun ist die gesamte Länge ihrer Bahn nur 2φ . Wenn etwa die Einheit 10 Zentimetern entspricht und die Bahngeschwindigkeit auf der Schneckenlinie 1cm/sec ist, dann ist die '0' bei A ungefähr in 32,4 Sekunden in S verschwunden, alle anderen Fibonacci-Zahlen, gerade die Giganten unter ihnen noch viel früher. S verhält sich ähnlich wie ein Schwarzes Loch in einer Galaxie, das vermöge seiner Gravitation dabei ist, die ihn umkreisende Materie (in freilich astronomischen Zeiträumen) zu verschlingen.

Ist das, was den Fibonacci-Zahlen hier *in Gedanken* widerfährt, überhaupt widerspruchsfrei zu denken? Darf man überhaupt davon sprechen, dass die '0' und die anderen Fibonacci-Zahlen den Punkt S *überhaupt* -und dies schon nach wenigen Sekunden- *erreichen*?

Das ist dasselbe Problem wie das berühmte, von Aristoteles überlieferte so genannte 'Paradoxon des Zenon von Elea' über den Wettlauf von Achilles mit der Schildkröte, welcher Achilles großzügig und siegessicher ein Stadion Vorsprung gibt, die er aber -Zenon zufolge- nicht einmal auch nur einholen kann, weil die Schildkröte immer schon ein Stück weiter sei, wenn Achilles ihren Vorsprung aufgeholt hat⁸.

Die hier gewählte Zuordnung der Fibonacci-Terme $+f(n)-(n-1)\varphi$ (und der mit entgegengesetzten Vorzeichen) zu den Rechteckseiten und der damit verbundenen Fibonacci-Zahlen zu den Eckpunkten der betreffenden Strecken ist schon sehr kanonisch und als Bijektion auch vollständig.

Man könnte hier auf den Gedanken kommen, dass die Zuordnung der Fibonacci-Zahlen zu Punkten der 'logarithmischen Spirale'⁹ wesentlich eleganter wäre. Die Spirale führt auf einem Viertelkreis durch das erste Quadrat von A zu F und von hier auf einem Viertelkreis zu H,....zu I,.....

Auch ihre Gesamtlänge G hin zu S ist berechenbar, sie ist nämlich gegeben durch die geometrische Reihe

$$G = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot (\varphi^{-1} + \varphi^{-2} + \varphi^{-3} + \dots) = \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi - 1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \varphi = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + \varphi) \quad \square \approx 4,19$$

Die Spirale kreist immerhin durch alle Quadrate, die die neuen Rechtecke definieren, während die oben definierte Wegschnecke immer nur ein Stück weit um die Rechtecke herum geht. Die Spirale ist zwar als Kurve viel schöner als die rechtwinklige Schneckenlinie, denn sie ist immerhin an jeder Stelle differenzierbar und lässt sich durch einen geschlossenen Term definieren¹⁰.

Sie hat aber einen Nachteil: Es ist kein zwingendes System der Zuordnung der Fibonacci-Zahlen zu ihren Punkten möglich. Legt man die oben gewählte Zuordnung zugrunde, dann lässt sie die unendlich vielen Punkte der Rechtecke und damit die entsprechenden Zahlen, die auf d_1 liegen, außen vor. Zwar ließe sich auch das gedanklich reparieren, indem man die fehlende Fibonacci-Zahlen, z.B. die 3 oder die 8 auf den Schnittpunkt von d_1 mit der Spirale projiziert. Das wäre aber ein gemischtes, wenig kanonisches und unschönes Konstrukt, das nicht einmal bijektiv ist.

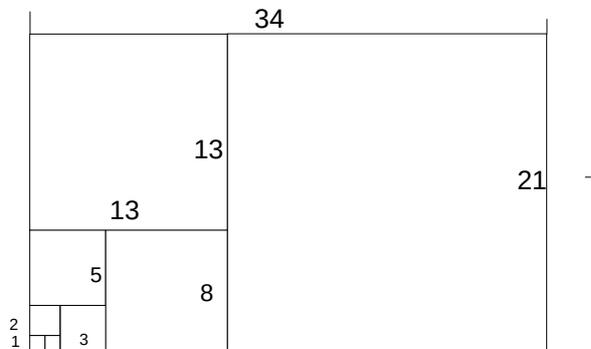
8 Hierzu gibt es viele interessante Aufsätze im Internet unter 'Achilles und die Schildkröte'

9 s. z.B. Peters oder auch Stelzner (aaO); ebenso Anm. 10

10 Siehe z.B. Peters (aaO) oder auch bei Knott (Anm. 10)

Ron Knott¹¹ ordnet die Fibonacci-Zahlen in der nachstehend abgebildeten Skizze den Seitenlängen von Quadraten zu. Hierin ist die definierende Eigenschaft der Fibonacci-Zahlen, ihre Summeneigenschaft wunderbar anschaulich dargestellt.

Die Seitenlängen aber stehen nie exakt im Verhältnis ϕ zueinander . Immerhin strebt ihr Verhältnis für $n \rightarrow \infty$ -wie oben gezeigt- gegen ϕ : $2/1$; $3/2$; $5/3$; $8/5$, $13/8$;.....und zwar um so genauer, je weiter sich die Figur in die Unendlichkeit in den Tiefen der zweidimensionalen euklidischen Ebene verabschiedet. Diese Zuordnung hat also auch den Nachteil, dass der Zusammenhang der Fibonacci-Zahlen mit dem Goldenen Schnitt ϕ nicht direkt implementiert ist.



¹¹ www.maths.surrey.ac.uk : Fibonacci-numbers, the Golden Section and the Golden String; hier: The Fibonacci-Spiral and the Golden Spiral